· 专题一:双清论坛“大规模商务场景的统计管理论” ·

管理决策中的分布鲁棒优化*

章 宇[1] 张 静[1] 刘文欣[1] 李宁心[1]
周冰洁[1] 贾晨诗[1] 寇 纲[1,2]** 唐加福[3]**

1. 西南财经大学 工商管理学院,成都 611130
2. 湘江实验室,长沙 410205
3. 东北财经大学 管理科学与工程学院,大连 100190

[摘 要] 《中华人民共和国国民经济和社会发展第十四个五年规划和 2035 年远景目标纲要》要求大力发展物流、交通、医疗等行业,其中做好管理决策是关键。作为管理决策的引擎,分布鲁棒优化以其决策稳健性、计算便利性、应用普适性等突出优势,在近 20 年得到了学界和业界的广泛关注。本文从优化问题环境参数的不确定性建模、分布鲁棒机会约束优化以及分布鲁棒线性优化等方面,梳理了分布鲁棒优化的经典结论与研究现状,并以车辆路径优化、共享出行车辆调配、医疗手术室调度三个典型问题为例,回顾了分布鲁棒优化在管理决策中的应用。立足大数据时代,当前研究趋势包括:特征数据驱动的分布鲁棒优化、结合具体应用场景的数据驱动型分布鲁棒优化以及数据驱动型分布鲁棒离散优化的算法设计等。这些重要问题的解决将推动该领域的数据化发展,并进一步为服务国家战略赋能。

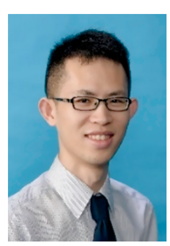
[关键词] 管理决策;分布鲁棒优化;分布鲁棒机会约束优化;分布鲁棒线性优化

1 分布鲁棒优化的研究意义

《中华人民共和国国民经济和社会发展第十四个五年规划和 2035 年远景目标纲要》(以下简称“‘十四五’规划”)明确指出,为全面实现社会主义现代化,需大力构建现代物流体系、加快建设交通强国、健全医疗救治体系、提升供应链现代化水平、优

寇纲 教授,博士生导师。现任中国人民政治协商会议成员、湘江实验室副主任、西南财经大学大数据研究院院长、国家杰出青年科学基金获得者、全国 MBA 教育指导委员会委员。主持多项国家社会科学基金重大项目、国家自然科学基金重点国际合作项目等。共发表论文 100 余篇,过去 5 年被他引万余次;多次荣获教育部自然科学奖一等奖,国家级教学成果二等奖等国家级奖励。

唐加福 东北财经大学学术委员会主任,管理科学与工程学院教授,教育部长江学者奖励计划特聘教授,国家杰出青年科学基金获得者。发表论文 80 余篇,专著、译著 3 部。主持国家自然科学基金创新研究群体项目等。获教育部科技进步奖(甲类)二等奖 1 项、辽宁省自然科学成果奖三等奖 1 项。



章宇 西南财经大学“光华杰出学者计划”青年杰出教授,教育部长江学者奖励计划青年学者。在 *Operations Research* (UTD24)、*Mathematical Programming*、*INFORMS Journal on Computing* (UTD24)、*Production and Operations Management* (UTD24)、*Transportation Science* 等期刊发表学术论文 20 余篇。主持和参与国家自然科学基金项目 4 项。获中国管理科学与工程学会优秀博士学位论文奖、*Omega* 期刊最佳论文奖、上海哲学社会科学优秀成果奖二等奖等奖励。

收稿日期:2023-12-30;修回日期:2024-06-18
* 本文根据国家自然科学基金委员会第 344 期“双清论坛”讨论的内容整理。
** 通信作者,Email: kougang@swufe.edu.cn; tangjiafu@dufe.edu.cn
本文受到国家自然科学基金项目(72371204,72293563,71910107002,71901180)、四川省自然科学基金项目(24NSFSC6232)、西南财经大学“光华英才工程”的资助。

化电力生产和输送通道布局、提升水资源优化配置、完善国家应急管理体系等。站位国家重大发展战略需求，解决好物流、交通、医疗、供应链、电力、水利等众多领域的管理决策问题成为了迫切紧要任务，其中的核心关键科学问题是如何进行最优化，以实现资源要素的优化配置，进而提高企业、社会、国家的运行效率，增进民生福祉。

以解决管理决策问题为导向，在建模和求解不确定环境下的优化问题的多种方法论中，分布鲁棒优化（Distributionally Robust Optimization）以其决策鲁棒性、计算便利性、应用普适性等突出优势和颠覆性的方法创新，在近 20 年来引起了学术界与工业界的广泛关注，理论体系得以大力发展，并产生了巨大的社会经济价值。

随着大数据时代的到来，各行各业的数字化改革如火如荼地进行，从业者和研究者普遍发现数据中蕴含巨大价值。对于分布鲁棒优化，如何利用数据进行不确定环境的建模，并对管理决策问题进行优化，成为了当前该领域的核心关键科学问题，因此有必要梳理传统分布鲁棒优化领域的经典结论与研究现状，促进分布鲁棒优化理论的数据化发展，并为实现“十四五”规划发展战略目标赋能。

2　分布鲁棒优化的研究进展

本文用$\mathbb{R}$代表实数集，粗体小写字母代表列向量（例如 $\boldsymbol{x}$），粗体大写字母代表矩阵（例如 $\boldsymbol{A}$），参数上方带波浪号代表该参数为随机变量（例如 $\tilde{\xi}$），$[I]=\{1,2,\cdots,I\}$ 代表从 1 到 I 的自然数集，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 代表矩阵/向量的转置。$\mathbb{P}[\cdot]$代表事件发生的概率，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\xi}]$代表随机变量 $\tilde{\xi}$ 的均值。$\mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi})$代表支撑集为 $\boldsymbol{\Xi}$ 的概率分布的集合。

优化问题指在满足相关资源约束前提下，确定一组决策变量的值，使预设的目标函数值最优，例如利润最大化或费用最小化。相关研究成果（理论、模型、算法、应用）在各行各业的管理决策中发挥着举足轻重的支撑作用。线性优化/规划是最基本的优化模型，形式为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant b_i, \quad \forall i \in [I]. \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$[I]=\{1,2,\cdots,I\}$ 为约束的下标集；决策变量向量为 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^J$，环境参数包括费用向量 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^J$、约束条件左端项系数向量 $\boldsymbol{\xi}_i\in\mathbb{R}^J$、右端项系数 $b_i\in\mathbb{R}$，这些参数为确定值。线性优化可用于解决诸多现实问题，例如投资组合优化、生产计划、网络流优化等问题。

现实世界中，描述未来发生事件的环境参数 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在优化/规划/计划阶段往往不确定，例如未来某资源的购买价格、两地间的旅行时长、某股票的回报率等。为了让优化结果对现实更具指导意义，在优化模型中考虑环境参数的不确定性至关重要。在不确定环境下，(1) 中的某一约束变为

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant b. \tag{2}$$

其中，为阐述方便，忽略下标 i；参数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的波浪号代表其为随机变量。记 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的联合概率分布函数为 $\mathbb{P}$，现实世界无法直接观测 $\mathbb{P}$，故通过部分分布信息构建其模糊集 $\mathcal{P}$，使得 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$具有较大置信度，第 2.1 节将阐述如何构建 $\mathcal{P}$。

不确定环境下的线性优化从技术上主要关注如何处理约束式(2)。因其左端项为随机变量而右端项为实数，故通常意义上无法直接比较大小。在此，主要介绍两种典型处理方式，第 2.2 节基于分布鲁棒机会约束优化的思想，介绍如何处理

$$\mathbb{P}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant b] \geqslant 1-\varepsilon, \quad \forall\ \mathbb{P}\in\mathcal{P}. \tag{3}$$

即约束(2)成立的概率不小于 $1-\varepsilon$，其中与决策者保守程度相关的阈值$\varepsilon\in[0,1]$的典型取值为1%或5%。第 2.3 节基于分布鲁棒线性优化范式，介绍如何处理

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}] \leqslant b, \quad \forall\ \mathbb{P}\in\mathcal{P}. \tag{4}$$

也就是约束(2)需在其左端项通过均值来度量的情况下满足。

分布鲁棒优化采取保守策略，令这两个约束条件对模糊集 $\mathcal{P}$中所有概率分布$\mathbb{P}$ 皆满足，它也是因此得名：“鲁棒”的内涵是考虑最坏情况，而“分布”表明最坏情况的主体是环境参数的分布函数。本文讨论的范围仅限于分布鲁棒优化中最基本的情形；读者可自行扩展至参数 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 具有不确定性的情形，独立机会约束(3)扩展至联合机会约束的情形，约束(4)的左端项扩展为条件风险值、分段仿射函数、二次函数等更一般的情形。对分布鲁棒优化的全面综述可参见 Rahimian 和 Mehrotra[1]。与之相比，本文更聚焦于最核心最基本的结论，关注其在管理决策中的应用，降低了数学要求，进而更加通俗易懂。

2.1　分布函数的模糊集

管理决策问题环境中随机参数的分布函数往往难以从现实世界直接获取。鉴于此，分布鲁棒优化方法假设其分布函数并不明确，而是处于一个不确定集中。通常把分布函数的不确定集称为模糊集（Ambiguity Set）。模糊集通过随机变量的不完全

分布信息构建而成，这些信息可通过数据估计/预测。此外，它还需保证相应分布鲁棒优化模型可解(Tractable)。

从数学上说，分布鲁棒优化囊括随机规划(Stochastic Programming)和传统鲁棒优化(Robust Optimization)为特殊形式，因此分布鲁棒优化更具一般性。当环境变量 $\tilde{\xi}$ 的分布函数 $\mathbb{P}_0$ 可获知时，可令模糊集为单元素集 $\mathcal{P}_S \triangleq \{\mathbb{P}_0\}$，则分布鲁棒优化退化为随机规划；当仅知环境变量的不确定集/支撑集 Ξ 时，可令模糊集为 $\mathcal{P}_R \triangleq \mathcal{P}_0(\Xi)$，即支撑集为 Ξ 的所有概率分布函数之集合，则分布鲁棒优化退化为经典鲁棒优化。

按照描述分布函数的信息种类划分，目前相关研究主要提出了两类模糊集。

2.1.1 基于广义矩信息的模糊集

在统计学中，矩(Moment)表征随机变量的分布。对于随机变量 $\tilde{\xi}$，其 n 阶矩被定义为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\xi}^n]$，$n \geqslant 1$。因此，随机变量一阶矩为均值，表征其位置(Location)；二阶矩与方差有关，表征其散度(Dispersion)；三阶矩表征其偏度；等等。广义地，可利用其它形式表征其相关信息。例如，绝对离差均值 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\tilde{\xi}-\mu|]$ 可表征其散度，其中 μ 为其均值；半绝对离差均值 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\xi}-\mu)^+]$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\mu-\tilde{\xi})^+]$ 可从某种程度刻画其偏度，其中 $(x)^+ \triangleq \max\{x, 0\}$。

早期研究往往假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的概率分布无法准确获取，但其均值 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 可估计，构成的模糊集[2-4]为

$$\mathcal{P}_{MV} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J) \;\middle|\; \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \sim \mathbb{P} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] = \boldsymbol{\mu} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma} \end{array} \right\} \tag{5}$$

如进一步考虑支撑集 Ξ，则模糊集为 $\mathcal{P}_{MVS} = \mathcal{P}_{MV} \cap \mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi})$。研究表明，基于 $\mathcal{P}_{MVS}$ 的分布鲁棒优化模型一般不易求解[5,6]。如给定的 $\boldsymbol{\Sigma}$ 不是准确协方差而是其上界，对应的模型却可解[7,8]，该模糊集为

$$\mathcal{P}_{M} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \sim \mathbb{P} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] = \boldsymbol{\mu} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] \preccurlyeq \boldsymbol{\Sigma} \end{array} \right\} \tag{6}$$

其中"$\preccurlyeq$"为半正定锥空间的不等号，即 $\boldsymbol{X} \preccurlyeq \boldsymbol{Y}$ 意味着 $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}$ 为半正定矩阵。

Delage 和 Ye[9]研究了 $\mathcal{P}_M$ 的变体

$$\mathcal{P}_{DY} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \sim \mathbb{P} \\ (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}]-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}]-\boldsymbol{\mu}) \leqslant \gamma_1 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] \preccurlyeq \gamma_2\boldsymbol{\Sigma} \end{array} \right\}, \tag{7}$$

其中，第一个约束指 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的均值处于一个以 $\boldsymbol{\mu}$ 为球心的椭球中，$\gamma_1 \geqslant 0$ 和 $\gamma_2 \geqslant 1$ 为两个参数。从数据驱动的视角看，假设 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 客观上服从概率分布 $\mathbb{P}_0$，但无法观测该分布，而仅能观测其 S 组样本/历史数据/观测值 $(\hat{\boldsymbol{\xi}}_s)_{s\in[S]}$，令

$$\boldsymbol{\mu} \triangleq \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]}\hat{\boldsymbol{\xi}}_s, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_s-\boldsymbol{\mu})(\hat{\boldsymbol{\xi}}_s-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

且 γ_1 和 γ_2 通过与样本量 S 和参数 $\delta > 0$ 有关的某函数给定时(随着 $S \to +\infty$，有 $\gamma_1 \to 0$ 和 $\gamma_2 \to 1$)，则在统计学上可证明 $\mathbb{P}_0 \in \mathcal{P}_{DY}$ 的置信度大于等于 $1-\delta$。

并非任意基于广义矩信息的模糊集都能保证相应分布鲁棒优化模型可解。Wiesemann 等[7]提出了一种广义的表达形式，能囊括 $\mathcal{P}_M$ 和 $\mathcal{P}_{DY}$ 为其特殊形式，能建模许多其它的广义矩信息，如绝对离差、半方差、高阶矩等，且在某些技术性假设条件下，其分布鲁棒优化模型可解[7,8]。该模糊集的简化形式为

$$\mathcal{P}_{WKS} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi}) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) \sim \mathbb{P} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{u}}] = \boldsymbol{b} \end{array} \right\}, \tag{9}$$

其中 $\mathbb{P}$ 为 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 和辅助随机变量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的联合概率分布，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{B\times J}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{B\times U}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^B$；支撑集 $\boldsymbol{\Xi}$ 给定为

$$\boldsymbol{\Xi} = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^U \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{d}\} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{D\times J}$，$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{D\times U}$，$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^D$，$\mathcal{K}$ 代表某真锥(Proper Cone)，如非负象限、二阶锥、半正定锥等。在此，"$\preccurlyeq_{\mathcal{K}}$"为广义不等号；关于锥和相应的锥规划(Conic Programming)，可参见 Ben-Tal 和 Nemirovski[10]。模糊集 $\mathcal{P}_{WKS}$ 巧妙之处在于引入了辅助随机变量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$，增强了其建模能力，如下例所示。

通过 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$、绝对离差均值上界 $\boldsymbol{\sigma}$ 及多面体支撑集 $\boldsymbol{\Xi}$ 构成的模糊集为

$$\mathcal{P}_{MAD}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi})\left|\begin{array}{c}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu}|]\leqslant\boldsymbol{\sigma}\end{array}\right.\right\},\tag{11}$$

其中，$|\tilde{\boldsymbol{\xi}}|$ 代表对向量 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的每个元素分别取绝对值构成的向量，取正符 $(\tilde{\boldsymbol{\xi}})^+$ 类似。目前虽无法直接求解基于 $\mathcal{P}_{MAD}$ 的分布鲁棒优化模型，但如引入辅助变量，$\mathcal{P}_{MAD}$ 则变成

$$\mathcal{P}_{MADL}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\bar{\boldsymbol{\Xi}})\left|\begin{array}{c}(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\tilde{\boldsymbol{u}})\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{u}}]\leqslant\boldsymbol{\sigma}\end{array}\right.\right\},\tag{12}$$

其扩展的支撑集为

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}=\{(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})\mid\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\xi}\}.$$

在此，$\mathcal{P}_{MADL}$ 即为 $\mathcal{P}_{WKS}$ 的一个特例，因此变得可处理[7,8]。类似地，前文提到的 $\mathcal{P}_{DY}$ 和 $\mathcal{P}_M$ 以及更多其它形式（如 Bertsimas 等[11]）也可借助辅助变量，化为 $\mathcal{P}_{WKS}$ 的形式。

2.1.2 基于统计距离（statistical distance）的模糊集

大数据时代背景下，环境参数的历史数据越来越易获取，自然催生了通过历史数据对应的经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 来近似真实概率分布的想法。经验分布是建立在 S 个历史数据点上的离散均匀分布，它视每一条历史数据 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_s$ 为随机变量的一个可能的结果，出现概率为 $1/S$，即

$$\hat{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+=\hat{\boldsymbol{\xi}}_s]=\frac{1}{S}\quad\forall s\in[S].$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 对应的经验随机变量。

经验分布并不等同于真正概率分布，故假设真正概率分布与经验分布在概率空间中的统计距离不超过某一阈值，并以此构建模糊集。于是，如何定义两个概率分布间的统计距离成为了关键，它不仅需具有良好的统计学性质，而且需保证相应的分布鲁棒优化模型可解。在此介绍两种典型形式。

第一是基于 ϕ-散度（ϕ-divergence）的模糊集，定义为

$$\mathcal{P}_{\phi}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J)\left|\begin{array}{c}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\sim\mathbb{P},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+\sim\hat{\mathbb{P}}\\ D_{\phi}(\mathbb{P}\parallel\hat{\mathbb{P}})\leqslant\theta\end{array}\right.\right\},\tag{13}$$

其中，$D_{\phi}(\mathbb{P}\parallel\hat{\mathbb{P}})$ 表示真正分布 $\mathbb{P}$ 对于经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 的 ϕ-散度（不严谨地，可理解为某种概率“距离”），定义如（14）；$\theta>0$ 为给定的“距离”上界。

$$D_{\phi}(\mathbb{P}\parallel\hat{\mathbb{P}})=\sum_{s\in[S]}\hat{\mathbb{P}}(s)\phi\left(\frac{\mathbb{P}(s)}{\hat{\mathbb{P}}(s)}\right)\tag{14}$$

在（14）中，$\phi:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ 为一类凸函数，详见 Ben-Tal 等[12]；$\mathbb{P}(s)$ 表示概率分布$\mathbb{P}$中第 $s\in[S]$个观测值发生的概率。可见，该模糊集要求真正的概率分布函数支撑集与经验分布支撑集相同，也就无法考虑历史数据以外的点/场景，仅将历史数据发生的概率从经验分布的各 $1/S$ 变成了更具“鲁棒性”的值。例如：

当 $\phi(x)=x\log x-x+1$ 时，ϕ 散度具体化为（15），名为 Kullback-Leibler 散度（KL Divergence），又名相对熵（Relative Entropy）。

$$D_{KL}(\mathbb{P}\parallel\hat{\mathbb{P}})=\sum_{s\in[S]}\mathbb{P}(s)\log\left(\frac{\mathbb{P}(s)}{\hat{\mathbb{P}}(s)}\right)\tag{15}$$

记其模糊集为 $\mathcal{P}_{KL}$，即（13）中将 D_{ϕ} 具体化为 D_{KL}。对于更多的 D_{ϕ} 函数形式，参见 Ben-Tal 等人[12]以及 Jiang 和 Guan[13]。

第二是基于 Wasserstein 距离的模糊集，定义为

$$\mathcal{P}_{W}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\boldsymbol{\Xi})\left|\begin{array}{c}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\sim\mathbb{P},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+\sim\hat{\mathbb{P}}\\ d_W(\mathbb{P},\hat{\mathbb{P}})\leqslant\theta\end{array}\right.\right\}.\tag{16}$$

此模糊集囊括了概率空间中以 Wasserstein 距离为度量标准，以经验分布$\hat{\mathbb{P}}$ 为球心，以 $\theta\in\mathbb{R}_+$为半径的球中所有的概率分布。从数据驱动的角度，Esfahani 和 Kuhn[14]的研究表明，记真实但未知的概率分布为 $\mathbb{P}_0$，则当 θ 通过与样本量S 和参数$\delta\in(0,1)$有关的某函数取值时（随着 $S\to\infty$，有 $\theta\to0$），从统计学上可证明 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_W$ 的置信度大于等于 $1-\delta$。该模糊集中，Wasserstein 距离定义为

$$\begin{aligned}d_W(\mathbb{P},\hat{\mathbb{P}})=\inf_{\bar{\mathbb{P}}}\quad&\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+\|]\\ \text{s.t.}\quad&(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+)\sim\bar{\mathbb{P}},\tilde{\boldsymbol{\xi}}\sim\mathbb{P},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+\sim\hat{\mathbb{P}},\bar{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+)\in\boldsymbol{\Xi}\times\boldsymbol{\Xi}]=1.\end{aligned}\tag{17}$$

其中的 $\bar{\mathbb{P}}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^+$的联合概率分布，$\|\cdot\|$表示范数。根据定义，可直观地将 Wasserstein 距离视为从真实分布$\mathbb{P}$ 向经验分布$\hat{\mathbb{P}}$ 移动概率质量（Probability Mass）的最小费用。上述定义准确说是 1 型 Wasserstein 距离，文献中[14-16]研究了更一般的 Wasserstein 距离。特别地，Wasserstein 距离相关的对偶理论至关重要，为其分布鲁棒优化提供了简单求解路径[14,15,17]。

2.1.3 其它模糊集

基于广义矩信息和基于统计距离的模糊集从形式上有所区别，Chen 等[18]发现了它们的联系，构造了称为分事件的模糊集（Event-wise Ambiguity Set），其形式为

$$\mathcal{P}_E=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J\times[S])\;\middle|\;\begin{array}{c}(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\tilde{s})\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mid\tilde{s}\in\boldsymbol{\varepsilon}_k]\in\mathcal{Q}_k,\ \forall k\in[K]\\ \mathbb{P}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}\in\boldsymbol{\Xi}_s\mid\tilde{s}=s]=1,\forall s\in[S]\\ \mathbb{P}[\tilde{s}=s]=p_s,\forall s\in[S]\\ \boldsymbol{p}\in\mathcal{U}\end{array}\right\}. \tag{18}$$

其中，$s\in[S]$代表场景，$\boldsymbol{\Xi}_s$ 代表场景 $s\in[S]$中参数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的支撑集；$\boldsymbol{\varepsilon}_k\subseteq[S]$定义了事件 $k\in[K]$，$\mathcal{Q}_k$ 代表事件 $k\in[K]$下 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mid\tilde{s}\in\boldsymbol{\varepsilon}_k]$的可行域；$\mathcal{U}\subseteq\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_+^S\mid\sum_{s\in[S]}p_s=1\right\}$ 为概率 $\boldsymbol{p}$ 的不确定集。通过合理给定参数，$\mathcal{P}_E$ 可退化为 $\mathcal{P}_{WKS}$、$\mathcal{P}_\phi$、$\mathcal{P}_W$ 等，因此极具一般性。

除上述模糊集，文献中还提出了基于假设检验的模糊集[19]，基于单峰性、对称性、凸性等概率分布形状刻画的模糊集[20]，基于核函数的模糊集[21]等，供读者参考。

2.2 分布鲁棒机会约束优化

机会约束优化/规划（Chance-constrained Programming）是指当优化问题环境参数为随机变量时，在以一定概率满足约束条件的情况下进行优化。自 Charnes 和 Cooper[22]提出以来，该框架在管理决策等各领域得到了广泛研究与应用。本节讨论如何处理分布鲁棒机会约束(3)，其左端项可等价表示为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant b\}] \tag{19}$$

其中，$1\{\cdot\}$ 为指示函数，当其事件发生则取值为 1，否则为 0。指示函数为非凸函数，导致 (19)对 $\boldsymbol{x}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 而言皆为非凸函数，除个别特殊情况（如 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 服从联合正态分布）外难以处理。事实上，即便给定决策变量 $\boldsymbol{x}$ 和概率分布 $\mathbb{P}$，计算(3)左端项的概率值一般而言已是 NP（Non-deterministic Polynomial）难问题，更何况要基于此对 $\boldsymbol{x}$ 进行优化[23]。对此，大量研究建立起传统鲁棒优化与机会约束优化的关系，即传统鲁棒优化是机会约束优化的一种保守的近似[24-26]，且计算上可处理。

接下来讲述如何在分布鲁棒优化框架下处理机会约束式(3)。易知，约束(3)等价于

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\mathbb{P}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant b]\geqslant 1-\epsilon. \tag{20}$$

2.2.1 基于广义矩信息的模糊集情形

当(20)中模糊集取 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{MV}$ 且其中的 $\boldsymbol{\mu}\triangleq\boldsymbol{0}$ 时，Ghaoui 等[2]的研究表明，(20)等价于

$$\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}}\leqslant b. \tag{21}$$

这里，令 $\boldsymbol{\mu}\triangleq\boldsymbol{0}$ 并不失一般性，因为如 $\boldsymbol{\mu}\neq\boldsymbol{0}$ 则可通过变量替换法，令 $\tilde{\boldsymbol{z}}\triangleq\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\mu}$ 并将 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 视为(20)中的 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$。有趣的是，(21)恰好等价于传统鲁棒优化约束

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant b,\quad\forall\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Xi}(\epsilon), \tag{22}$$

其中，不确定集为椭球形[27]，给定为

$$\boldsymbol{\Xi}(\epsilon)\triangleq\left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^J\mid\|\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi}\|_2\leqslant\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\right\}.$$

当(20)中模糊集取 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{MVS}$ 时，分布鲁棒机会约束优化一般不易处理。因此，研究者们提出了基于条件风险值（Conditional Value-at-risk）的近似方法，参见文献[28,29]等。

当 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{WKS}$ 时，Hanasusanto 等[8]证明了(20)等价于一系列线性锥约束，见其定理 7。因 $\mathcal{P}_M$ 和 $\mathcal{P}_{DY}$ 均为 $\mathcal{P}_{WKS}$ 的特例，故其均可迎刃而解。作为 Hanasusanto 等[8]的扩展，Xie 和 Ahmed[30]考虑了更一般的模糊集，研究了分布鲁棒独立机会约束优化(3)和联合机会约束优化的等价凸优化形式。对于考虑均值、散度、支撑集的一类模糊集，Hanasusanto 等[31]进一步研究了其分布鲁棒联合机会约束优化的计算复杂度及求解方法。

2.2.2 基于统计距离的模糊集情形

当(20)中模糊集取 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{KL}$ 时，Jiang 和 Guan[13]的研究表明，(20)等价于

$$\hat{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant b]\geqslant 1-\bar{\epsilon}. \tag{23}$$

其中，$\hat{\mathbb{P}}$ 为经验分布，$\bar{\epsilon}$ 的计算与 ϵ 的值有关，且有 $\bar{\epsilon}\leqslant\epsilon$。可见，它与随机规划中基于采样平均近似（Sample Average Approximation）的机会约束相比，仅仅是具有更保守的概率界 $\bar{\epsilon}$ 而已。此外，Jiang 和 Guan[13]探究了一般的 $\mathcal{P}_\phi$ 模糊集下的分布

鲁棒联合机会约束优化。

当 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_W$ 时，Chen 等[32] 和 Xie[30] 讨论了如何处理分布鲁棒（独立和联合）机会约束优化问题，他们用不同的方法得到了相同的结论：机会约束(20)等价于混合 0－1 锥优化约束，见 Chen 等[32] 的命题 1。

2.3　分布鲁棒线性优化

现实世界中很多优化问题可建模为线性优化问题。线性约束不仅本身可描述许多现实问题的资源约束，而且可建模或近似更复杂形式的资源约束。本节主要讨论如何处理分布鲁棒线性优化约束式(4)。

接下来探讨如何处理分布鲁棒线性优化约束式(4)。易知，它等价于

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}]\leqslant b. \tag{24}$$

处理该约束的关键是考察左端项中优化问题

$$P(\boldsymbol{x})=\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}] \tag{25}$$

的对偶问题。注意，该优化问题中 $\boldsymbol{x}$ 被视为给定参数，而概率分布 $\mathbb{P}$ 才是决策变量。抽象地，(25)的对偶问题形式为

$$D(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{y}) \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为对偶决策变量，$\mathcal{Y}(\boldsymbol{x})$ 为其可行域，$f(\boldsymbol{y})$ 为目标函数，$\boldsymbol{x}$ 作为参数出现在 $\mathcal{Y}(\boldsymbol{x})$ 中。在某些条件下，强对偶成立，则 $P(\boldsymbol{x})=D(\boldsymbol{x})$。于是，(24)等价于

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{y})\leqslant b,\\&\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{27}$$

因此，技术上主要关注如何在取不同模糊集 $\mathcal{P}$ 的情况下求解(25)的对偶问题并证明强对偶定理成立。在此过程中，锥对偶理论[24,33]、半无限规划对偶理论[34]、拉格朗日对偶理论[2]、Fenchel 对偶理论[35,36]等起到了重要的理论支撑作用。

2.3.1　基于广义矩信息的模糊集情形

当 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{MV}$ 或 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{MVS}$ 时，由于已知 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$，故(25)等价于 $P(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$。Popescu[3] 针对 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{MV}$ 且(25)目标函数中 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 变为一类非线性函数的情形，研究了其等价模型与求解方法。当(25)中 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{DY}$ 时，则在某些技术性条件下，Delage 和 Ye[9] 证明了(26)本质上是半正定优化问题，可多项式时间求解，见其命题 2。当(25)中 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{WKS}$ 时，则在某些技术性条件下，Wiesemann 等[7] 证明其对偶问题(26)本质上为锥优化问题，见其定理 1。当 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_E$ 时，Chen 等[18] 证明了其对偶问题(26)本质上为传统鲁棒优化问题，见其定理 1，而传统鲁棒优化已得到充分研究，可进一步转化成锥优化问题[24]。

此外，Doan 和 Natarajan[37] 研究了仅知离散边缘矩信息情形下的分布鲁棒优化问题，并设计了多项式时间求解算法。Padmanabhan 等[38] 考虑了 $\mathcal{P}_{MV}$ 模糊集但 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为分块对角矩阵情形下的分布鲁棒优化问题，并提出了基于半正定规划的多项式时间求解算法。

2.3.2　基于统计距离的模糊集情形

当(25)中 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_{KL}$ 时，则在某些技术性条件下，Hu 和 Hong[39] 推导出其对偶问题(26)的具体形式：

$$Z_D(\boldsymbol{x})=\min_{\alpha\geqslant 0}\alpha\log\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\tilde{\xi}+/\alpha}]+\alpha\theta. \tag{28}$$

其中的目标函数为凸函数，因此可用内点法[12] 或分段线性函数逼近[40] 等方法进行处理。此外，目标函数正好与熵风险测度(Entropic Value-at-risk)吻合，故揭示了分布鲁棒优化与风险测度的紧密关系。

当(25)中 $\mathcal{P}\triangleq\mathcal{P}_W$ 时，则在某些技术性条件下，Esfahani 和 Kuhn[14] 推导出其对偶问题(26)为凸优化问题，具体形式见其定理 4.2。因 $\mathcal{P}_W$ 带来的渐进收敛性、计算便利性、方案抗干扰性等诸多优势，对应的分布鲁棒优化问题不仅受到了管理决策领域的广泛关注[14,15]，而且得到了机器学习领域的深入研究[17,41]。

事实上，Popescu[3]、Delage 和 Ye[9]、Wiesemann 等[7]、Esfahani 和 Kuhn[14]、Chen 等[18] 等诸多研究均进一步解决了(25)中 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 变为分段仿射凸函数形式下的等价转化问题，该形式出现在许多管理决策问题中，如库存管理[42,43]、预约调度[44-46]、带时间窗的车辆路径问题[47] 等等。

3　分布鲁棒优化在管理决策中的应用

因其数据驱动性、决策稳健性、计算便利性等突出优势，分布鲁棒优化被广泛用于管理决策问题，本节以三个典型问题为例，回顾分布鲁棒优化在管理决策中的应用。

3.1　车辆路径优化问题

物流是国民经济正常运转的发动机，配送服务是物流运营管理的重要环节，车辆路径问题(Vehicle Routing Problem，VRP)是其核心关键科学问题。确定性 VRP 已被学界和业界广泛研究，但在车辆路径计划阶段，未来顾客需求量、车辆旅行时

间等参数具有不确定性，且其概率分布无法准确获知。在此背景下，分布鲁棒优化被用于解决 VRP。

当顾客需求的分布函数不确定时，Ghosal 和 Wiesemann[48] 提出了基于广义矩信息的模糊集（某种 $\mathcal{P}_{WKS}$ 的特例）进行刻画，他们用分布鲁棒机会约束（3）来描述车载量不超过车容量的约束。对于某些特殊的模糊集，推导了最坏的分布函数，最后提出分支切割算法求解该问题。Ghosal 等[49] 进一步扩展了该框架，考虑了更一般的分场景的模糊集（某种 $\mathcal{P}_E$ 的特例），利用更一般的风险测度（上述机会约束为其特例），并提出分支切割算法求解该问题。

当旅行时间的分布函数不确定时，带时间窗的 VRP 受到了关注，因其时间窗约束未必能绝对满足。Jaillet 等[50] 考虑了基于离散矩信息或基于均值和区间值的模糊集情形，最小化一种测度违背时间窗风险、与熵风险测度有关的指数；因数学推导所限，他们考虑了软时间窗情形，如果车辆早于时间窗到达，仍须马上开始服务顾客。Zhang 等[47] 利用旅行时间均值和协方差（即 $\mathcal{P}_{MV}$）刻画其分布函数，最小化一种测度迟到风险的基本风险指数，他们考虑了硬时间窗情形，即车辆在早到情况下允许等待。Zhang 等[51] 进一步考虑了基于 Wasserstein 距离的模糊集 $\mathcal{P}_W$，并推导揭示了该模型与采样平均近似模型之间的量化关系，设计了分支切割精确算法和变邻域搜索启发式算法求解该问题。

3.2 共享出行车辆调配问题

出行服务事关城市发展与百姓民生，共享出行以其高效、便捷、环保等突出优势，在近年来得以快速发展，供需不平衡催生了科学调配车辆的需求，而出行需求、车辆旅行时间等不确定性为其带来了挑战，分布鲁棒优化被用于解决该问题。

针对共享出行车辆调配问题，为描述不确定出行需求，He 等[52] 构建了基于广义矩信息的模糊集（某种$\mathcal{P}_{WKS}$ 的特例），以最小化车辆调配和失销总成本为目标，推导了两区域系统中的最优策略；利用线性决策准则，构建了多区域系统中的多阶段车辆调配模型，并推导出等价的二阶锥优化模型。Hao 等[53] 则进一步考虑了天气信息对出行需求的影响，构建了基于场景和矩信息的模糊集（某种 $\mathcal{P}_E$ 的特例），建立两阶段分布鲁棒优化模型，为共享车辆的调配提供了决策支持。

Tang 等[54] 针对多阶段的共享出行车调配问题，考虑出行需求、车辆旅行时间等多维度的不确定性以及服务水平、站点容量等多种现实运营约束，提出了基于熵风险测度的鲁棒优化模型，最小化车辆调配和失销惩罚成本的熵风险测度，揭示了该模型等价于基于 $\mathcal{P}_{KL}$ 的分布鲁棒优化模型，推导了其等价的混合整数凸优化模型。Miao 等[55] 结合多种预测方法，对于出行需求分布函数，提出了基于矩信息的模糊集 $\mathcal{P}_{DY}$，建立了分布鲁棒优化模型并推导了等价可解模型。特别地，他们提出了一种基于四叉树的动态区域划分方法，更好地刻画了出行需求的时空依赖性。

3.3 医疗手术室调度问题

手术室调度关乎患者的安全、医生的工作效率、医院的效益，以及三方的满意度，是重要的医疗服务运营管理问题。现实世界中，患者手术时长的概率分布无法获知准确，而仅能获取相关历史数据及患者特征信息。分布鲁棒优化方法被用于解决该问题。

为描述患者手术时长的分布函数，Zhang 等[56] 构建了基于矩信息的模糊集 $\mathcal{P}_{DY}$，通过机会约束（3）刻画尽量不加班手术的要求，构建了分布鲁棒优化模型并推导其等价的 0－1 半正定规划模型，使用割平面算法进行求解。Wang 等[57] 通过均值、平均绝对离差和手术时长支持集构建了模糊集 $\mathcal{P}_{MAD}$，以最小化手术室开放成本和期望加班时长之和为目标，构建了分布鲁棒优化模型，采用线性决策准则，推导了近似的混合整数规划模型，并通过启发式构造“接近”最坏分布的离散分布，提出一种高效算法。Shehadeh 和 Padman[58] 基于已知均值和区间值的模糊集（某种 $\mathcal{P}_{WKS}$ 的特例）刻画手术时长的分布函数，构建了分布鲁棒优化模型并设计了一种行列生成算法进行求解。

Deng 等[59] 构建了基于 ϕ-散度的模糊集 $\mathcal{P}_\phi$ 来描述手术时长的分布函数，并设计分支切割算法求解其等价的混合整数线性优化模型。Wang 等[60] 考虑了在手术时长不确定和急诊手术动态到达环境下，择期手术和急诊手术的调度问题，基于历史数据生成经验分布并构建 Wasserstein 模糊集 $\mathcal{P}_W$ 以刻画两类患者的手术时长的分布，以最小化手术室开放成本和预期加班成本为目标，构建分布鲁棒优化模型并开发精确的分支切割求解算法。

此外，有研究将患者的特征信息结合到模糊集的构造中，以避免手术室调度计划过于保守。Wang 等[61] 利用患者特征信息定义患者类型，并对每种类型进行均值和协方差估计，构建基于特征聚类的模糊集（某种 $\mathcal{P}_E$ 的特例）来描述手术时长，以最小化

加班风险为目标，构建特征驱动的自适应分布鲁棒优化模型，并推导等价的二阶锥优化模型，设计分支切割算法来求解该问题，有效规避了加班风险。

4　总结与展望

诸多管理决策问题本质上可抽象为优化问题。分布鲁棒优化具有决策鲁棒性、计算便利性、应用普适性等突出优势，为解决管理决策问题提供了强大引擎。本文梳理了分布鲁棒优化的经典结论与研究现状；部分研究[9, 13, 14, 19]明确称其为数据驱动的分布鲁棒优化方法，其它相关研究对数据的考虑不足。大数据时代，如何将数据与分布鲁棒优化方法更加紧密地结合成为了当前的核心关键科学问题。接下来总结几点未来研究方向。

4.1　特征数据驱动型分布鲁棒优化

目前，大部分“数据驱动”中的“数据”特指优化问题环境参数（如配送路径中的旅行时间、手术室调度中的手术时长、投资组合优化中的股票收益等）的历史数据。实践中，除了这些历史数据，影响它们的特征数据（如影响旅行时间的天气、影响手术时长的患者年龄与性别、影响股票收益的公司规模与市场效应等）同样至关重要。如何利用特征数据进一步提高环境参数的建模精度，并与后续的优化无缝结合，成为了当前重要课题。该领域方兴未艾，虽已有少量相关研究成果[21, 62-64]，但仍有众多未知，等待探索。

4.2　结合具体应用场景的数据驱动型分布鲁棒优化

由于其理论的深度，分布鲁棒优化自诞生至今，在顶级期刊的成果较多从理论方面进行突破，包括：构建数据驱动的模糊集、分析模糊集的统计学性质、分析鲁棒优化模型的解析解、设计高效求解算法或近似算法等。相比之下，结合实际数据和具体应用场景的研究不足。为了理论联系实际，深度发挥数据驱动型分布鲁棒优化的理论优势，今后可结合更多实际数据和问题场景开展研究，产生更大的社会经济价值。

4.3　数据驱动型分布鲁棒离散优化的算法设计

工业界大部分优化问题为离散优化问题，例如：快递配送中的车辆路径问题、投资中的项目组合问题、医疗中的手术室调度问题、一带一路建设中的网络设计问题等。众所周知，离散优化问题为 NP 难问题，需针对问题结构设计高效求解算法，以期提高求解效率，满足管理实践的需求。在本身是 NP 难问题的基础上考虑不确定性，引入数据驱动型分布鲁棒优化框架，将进一步加大求解难度。因此，如何挖掘具体分布鲁棒离散优化模型的结构特点、设计高效求解算法，并为管理决策赋能，具有重要的理论与现实意义。

参　考　文　献

[1] Rahimian H, Mehrotra S. Frameworks and results in distributionally robust optimization. Open Journal of Mathematical Optimization, 2022, 3: 1—85.

[2] El Ghaoui L, Oks M, Oustry F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: a conic programming approach. Operations Research, 2003, 51(4): 543—556.

[3] Popescu I. Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization. Operations Research, 2007, 55(1): 98—112.

[4] Chen WQ, Sim M. Goal-driven optimization. Operations Research, 2009, 57(2): 342—357.

[5] Bertsimas D, Popescu I. Optimal inequalities in probability theory: a convex optimization approach. SIAM Journal on Optimization, 2005, 15(3): 780—804.

[6] Natarajan K, Teo CP, Zheng ZC. Mixed 0-1 linear programs under objective uncertainty: a completely positive representation. Operations Research, 2011, 59(3): 713—728.

[7] Wiesemann W, Kuhn D, Sim M. Distributionally robust convex optimization. Operations Research, 2014, 62(6): 1358—1376.

[8] Hanasusanto GA, Roitch V, Kuhn D, et al. A distributionally robust perspective on uncertainty quantification and chance constrained programming. Mathematical Programming, 2015, 151(1): 35—62.

[9] Delage E, Ye YY. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. Operations Research, 2010, 58(3): 595—612.

[10] Ben-Tal A, Nemirovski A. Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[11] Bertsimas D, Sim M, Zhang ML. Adaptive distributionally robust optimization. Management Science, 2019, 65(2): 604—618.

[12] Ben-Tal A, den Hertog D, De Waegenaere A, et al. Robust solutions of optimization problems affected by uncertain probabilities. Management Science, 2013, 59(2): 341—357.

[13] Jiang RW, Guan YP. Data-driven chance constrained stochastic program. Mathematical Programming, 2016, 158(1): 291—327.

[14] Mohajerin Esfahani P, Kuhn D. Data-driven distributionally robust optimization using the Wasserstein metric: performance guarantees and tractable reformulations. Mathematical Programming, 2018, 171(1): 115—166.

[15] Gao R, Kleywegt A. Distributionally robust stochastic optimization with Wasserstein distance. Mathematics of Operations Research, 2023, 48(2): 603—655.

[16] Zhao CY, Guan YP. Data-driven risk-averse stochastic optimization with Wasserstein metric. Operations Research Letters, 2018, 46(2): 262—267.

[17] Kuhn D, Esfahani PM, Nguyen VA, et al. Wasserstein distributionally robust optimization: theory and applications in machine learning. Operations Research & Management Science in the Age of Analytics. INFORMS, 2019: 130—166.
[18] Chen Z, Sim M, Xiong P. Robust stochastic optimization made easy with RSOME. Management Science, 2020, 66 (8): 3329—3339.
[19] Bertsimas D, Gupta V, Kallus N. Data-driven robust optimization. Mathematical Programming, 2018, 167(2): 235—292.
[20] Popescu I. A semidefinite programming approach to optimal-moment bounds for convex classes of distributions. Mathematics of Operations Research, 2005, 30 (3): 632—657.
[21] Bertsimas D, Van Parys B. Bootstrap robust prescriptive analytics. Mathematical Programming, 2022, 195(1): 39—78.
[22] Charnes A, Cooper WW. Chance-constrained programming. Management Science, 1959, 6(1): 73—79. .
[23] Nemirovski A, Shapiro A. Convex approximations of chance constrained programs. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17(4): 969—996.
[24] Ben-Tal A, El Ghaoui L, Nemirovski A. Robust optimization. Princeton: Princeton university press, 2009.
[25] Bertsimas D, den Hertog D, Pauphilet J. Probabilistic guarantees in robust optimization. SIAM Journal on Optimization, 2021, 31(4): 2893—2920.
[26] Hong LJ, Huang ZY, Lam H. Learning-based robust optimization: procedures and statistical guarantees. Management Science, 2021, 67(6): 3447—3467.
[27] Natarajan K, Pachamanova D, Sim M. Constructing risk measures from uncertainty sets. Operations Research, 2009, 57(5): 1129—1141.
[28] Chen WQ, Sim M, Sun J, et al. From CVaR to uncertainty set: implications in joint chance-constrained optimization. Operations Research, 2010, 58(2): 470—485.
[29] Zymler S, Kuhn D, Rustem B. Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information. Mathematical Programming, 2013, 137(1): 167—198.
[30] Xie WJ, Ahmed S. On deterministic reformulations of distributionally robust joint chance constrained optimization problems. SIAM Journal on Optimization, 2018, 28(2): 1151—1182.
[31] Hanasusanto GA, Roitch V, Kuhn D, et al. Ambiguous joint chance constraints under mean and dispersion information. Operations Research, 2017, 65(3): 751—767.
[32] Chen Z, Kuhn D, Wiesemann W. Technical note—data-driven chance constrained programs over Wasserstein balls. Operations Research, 2024, 72(1): 410—424.
[33] Bertsimas D, Sim M. Tractable approximations to robust conic optimization problems. Mathematical Programming, 2006, 107(1): 5—36.
[34] Shapiro A. On duality theory of conic linear problems// Semi-Infinite Programming. Boston: Springer, 2001: 135—165.
[35] Ben-Tal A, den Hertog D, Vial JP. Deriving robust counterparts of nonlinear uncertain inequalities. Mathematical Programming, 2015, 149(1): 265—299.
[36] Zhen JZ, Kuhn D, Wiesemann W. A unified theory of robust and distributionally robust optimization via the primal-worst-equals-dual-best principle. Operations Research, 2023, 0: 1—17.
[37] Doan XV, Natarajan K. On the complexity of nonoverlapping multivariate marginal bounds for probabilistic combinatorial optimization problems. Operations Research, 2012, 60(1): 138—149.
[38] Padmanabhan D, Natarajan K, Murthy K. Exploiting partial correlations in distributionally robust optimization. Mathematical Programming, 2021, 186(1): 209—255.
[39] Hu Z, Hong LJ. Kullback-Leibler divergence constrained distributionally robust optimization. (2012-11-11)/[2024-03-25]. https://optimization-online. org/wp-content/uploads/2012/2011/3677. pdf.
[40] Long DZ, Qi J. Distributionally robust discrete optimization with Entropic Value-at-Risk. Operations Research Letters, 2014, 42(8): 532—538.
[41] Khamis A, Tsuchida R, Tarek M, et al. Scalable optimal transport methods in machine learning: a contemporary survey. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2024(99): 1—20.
[42] See CT, Sim M. Robust approximation to multiperiod inventory management. Operations Research, 2010, 58(3): 583—594.
[43] Mamani H, Nassiri S, Wagner MR. Closed-form solutions for robust inventory management. Management Science, 2017, 63(5): 1625—1643.
[44] Mak HY, Rong Y, Zhang JW. Appointment scheduling with limited distributional information. Management Science, 2015, 61(2): 316—334.
[45] Kong QX, Lee CY, Teo CP, et al. Scheduling arrivals to a stochastic service delivery system using copositive cones. Operations Research, 2013, 61(3): 711—726.
[46] Qi J. Mitigating delays and unfairness in appointment systems. Management Science, 2017, 63(2): 566—583.
[47] Zhang Y, Baldacci R, Sim M, et al. Routing optimization with time windows under uncertainty. Mathematical Programming, 2019, 175(1): 263—305.
[48] Ghosal S, Wiesemann W. The distributionally robust chance-constrained vehicle routing problem. Operations Research, 2020, 68(3): 716—732.
[49] Ghosal S, Ho CP, Wiesemann W. A unifying framework for the capacitated vehicle routing problem under risk and ambiguity. Operations Research, 2024, 72(2): 425—443.
[50] Jaillet P, Qi J, Sim M. Routing optimization under uncertainty. Operations Research, 2016, 64(1): 186—200.
[51] Zhang Y, Zhang ZZ, Lim A, et al. Robust data-driven vehicle routing with time windows. Operations Research, 2021, 69(2): 469—485.
[52] He L, Hu ZY, Zhang ML. Robust repositioning for vehicle sharing. Manufacturing & Service Operations Management, 2020, 22(2): 241—256.
[53] Hao ZW, He L, Hu ZY, et al. Robust vehicle pre-allocation with uncertain covariates. Production and Operations Management, 2020, 29(4): 955—972.

[54] Tang Q, Zhang Y, Zhou M. Robust vehicle repositioning with entropic risk measure. (2020-06-17)/[2024-03-25]. https://papers. nonprod. ssrn. com/sol3/papers. cfm?abstract_id=3612626.

[55] Miao F, He SH, Pepin L, et al. Data-driven distributionally robust optimization for vehicle balancing of mobility-on-demand systems. ACM Transactions on Cyber-Physical Systems, 5(2): 17.

[56] Zhang YL, Shen SQ, Erdogan SA. Solving 0-1 semidefinite programs for distributionally robust allocation of surgery blocks. Optimization Letters, 2018, 12(7): 1503—1521.

[57] Wang Y, Zhang Y, Tang JF. A distributionally robust optimization approach for surgery block allocation. European Journal of Operational Research, 2019, 273(2): 740—753.

[58] Shehadeh KS, Padman R. A distributionally robust optimization approach for stochastic elective surgery scheduling with limited intensive care unit capacity. European Journal of Operational Research, 2021, 290(3): 901—913.

[59] Deng Y, Shen SQ, Denton B. Chance-constrained surgery planning under conditions of limited and ambiguous data. INFORMS Journal on Computing, 2019, 31(3): 559—575.

[60] Wang Y, Zhang Y, Tang JF. Wasserstein distributionally robust surgery scheduling with elective and emergency patients. European Journal of Operational Research, 2024, 314(2): 509—522.

[61] Wang Y, Zhang Y, Zhou ML, et al. Feature-driven robust surgery scheduling. Production and Operations Management, 2023, 32(6): 1921—1938.

[62] Zhu TZ, Xie JG, Sim M. Joint estimation and robustness optimization. Management Science, 2022, 68(3): 1659—1677.

[63] Esteban-Pérez A, Morales JM. Distributionally robust stochastic programs with side information based on trimmings. Mathematical Programming, 2022, 195(1): 1069—1105.

[64] Kannan R, Bayraksan G, Luedtke JR. Residuals-based distributionally robust optimization with covariate information. Mathematical Programming, 2023: 1—57.

Distributionally Robust Optimization in Management Decision

Yu Zhang[1]　Jing Zhang[1]　Wenxin Liu[1]　Ningxin Li[1]

Bingjie Zhou[1]　Chenshi Jia[1]　Gang Kou[1,2*]　Jiafu Tang[3*]

1. *School of Business Administration, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu* 611130

2. *Xiangjiang Laboratory, Changsha* 410205

3. *School of Management Science and Engineering, Dongbei University of Finance and Economics, Dalian* 100190

Abstract　Outline of the 14th Five-Year Plan (2021-2025) for National Economic and Social Development and the Long-Range Objectives Through the Year 2035 mandates substantial development in areas such as logistics, transportation, and healthcare, in which management decision plays a key role. As the engine for management decisions, distributionally robust optimization, due to its prominent advantages in decision robustness, computational convenience, and widespread applicability, has garnered significant attention from academia and industry over the past two decades. This paper systematically reviews the classical results and current research status of distributionally robust optimization, focusing on: (1) uncertainty modeling, (2) distributionally robust chance-constrained optimization, and (3) distributionally robust linear optimization. Taking vehicle routing, fleet management in shared mobility, and healthcare surgery scheduling as examples, this paper then reviews the applications of distributionally robust optimization in management decisions. In the big data era, future research directions include: (1) feature data-driven distributionally robust optimization, (2) application-specific data-driven distributionally robust optimization, (3) algorithm design for data-driven distributionally robust discrete optimization. These directions aim to propel its data-driven development and further empower national strategic initiatives.

Keywords　management decision; distributionally robust optimization; distributionally robust chance constrained optimization; distributionally robust linear optimization

（责任编辑　张　强）

* Corresponding Authors, Email: kougang@swufe. edu. cn; tangjiafu@dufe. edu. cn